Teoria do Risco
Aula 3

Danilo Machado Pires
danilo.pires@unifal-mg.edu.br

https://atuaria.github.io/portalhalley/index.html

11/2023

Função de Distribuição

- Um fenômeno aleatório ou estocástico é descrito minimamente por uma distribuição de probabilidade.

  - Indexa parâmetros e campos de variação.

- O conhecimento do modelo e suas principais características permite ao pesquisador ter uma clara visão do uso adequado dos mesmos.

Importantes modelos discretos

Distribuição Uniforme discreta

$Y \sim U_d(E)$, com "E" sendo o conjunto de seus valores.

$$P(Y = y) = \frac{1}{N} I_{\{1,2,\ldots,N\}}(y)$$

Todos os possíveis valores da variável são equiprováveis.

$Y \sim U_d(1, N)$

$$E(Y) = \frac{N+1}{2} \qquad var(Y) = \frac{N^2-1}{12}$$

- *Modelagem de sorteios*
- *Casos em que há grandes incertezas sobre os valores de Y...*

Distribuição de Bernoulli

$Y \sim Bernoulli(q)$

$$P(Y = y) = q^y(1-q)^{1-y}I_{\{0,1\}}(y)$$

Uma variável aleatória que segue o modelo Bernoulli, assume apenas os valores 0 ou 1.

$$E(Y) = q \qquad\qquad var(Y) = q(1-q)$$

- *Experimentos que admitem somente dois resultados*
- *Modelos de preferência.*

Distribuição Binomial

Considerando uma sequência de n ensaios de Bernoulli, a observação conjunta de vários desses ensaios leva à definição da distribuição Binomial.

Exemplo: Suponha o lançamento de 4 moedas, com probabilidade de sair coroa igual a q (sucesso) e $1 - q$ (fracasso). Qual o modelo de probabilidade para o número de coroas?

Moeda 1	Moeda 2	Moeda 3	Moeda 4	Nº de coroas	Probabilidades	
Cara	Cara	Cara	Cara	0	$q^0(1-q)^4$	$\binom{4}{0} q^0(1-q)^4$
Coroa	Cara	Cara	Cara	1	$q^1(1-q)^3$	$\binom{4}{1} q^1(1-q)^3$
Cara	Coroa	Cara	Cara		$q^1(1-q)^3$	
Cara	Cara	Coroa	Cara		$q^1(1-q)^3$	
Cara	Cara	Cara	Coroa		$q^1(1-q)^3$	
Coroa	Coroa	Cara	Cara	2	$q^2(1-q)^2$	$\binom{4}{2} q^2(1-q)^2$
Coroa	Cara	Coroa	Cara		$q^2(1-q)^2$	
Coroa	Cara	Cara	Coroa		$q^2(1-q)^2$	
Cara	Coroa	Cara	Coroa		$q^2(1-q)^2$	
Cara	Cara	Coroa	Coroa		$q^2(1-q)^2$	
Cara	Coroa	Coroa	Cara		$q^2(1-q)^2$	
Cara	Coroa	Coroa	Coroa	3	$q^3(1-q)^1$	$\binom{4}{3} q^3(1-q)^1$
Coroa	Cara	Coroa	Coroa		$q^3(1-q)^1$	
Coroa	Coroa	Cara	Coroa		$q^3(1-q)^1$	
Coroa	Coroa	Coroa	Cara		$q^3(1-q)^1$	
Coroa	Coroa	Coroa	Coroa	4	$q^4(1-q)^0$	$\binom{4}{4} q^4(1-q)^0$

Distribuição Binomial

Seja Y o número total de sucessos obtidos, na realização de n ensaios de Bernoulli independentes. Então é $Y \sim B(n, q)$.

$$P(Y = y) = \binom{n}{y} q^y (1 - q)^{n-y} I_{\{0,1,\dots,n\}}(y)$$

$$E(Y) = nq \qquad\qquad var(Y) = nq(1 - q)$$

- *Frequência de sinistros.*

Distribuição de Poisson

Sendo a ocorrência do evento em estudo um evento raro, o cálculo através do modelo binomial se torna extremamente laborioso

$Y \sim Po(\lambda)$

$$P(Y = y) = \frac{\lambda^y e^{-\lambda}}{y!} I_{\{0,1,\dots\}}(y)$$

O parâmetro λ indica a taxa de ocorrência por unidade de medida.

$$E(Y) = \lambda \qquad\qquad var(Y) = \lambda$$

- Eventos que ocorrem num dado período de tempo, independentemente de quando ocorreu o último evento.
- Eventos de baixa probabilidade de ocorrência (raros).

Importantes modelos discretos

- **Distribuição Geométrica** $Y \sim G(q)$

$$P(Y = y) = q(1 - q\ )^{y-1}$$

$$E(Y) = \frac{1}{q} \qquad var(Y) = \frac{1-q}{q}$$

Distribuição de espera: Quantidade de tentativas que leva para ocorrência de um evento de interesse.

Falta de memória $\quad P(Y > s + t | Y > s) = P(Y > t)$

Importantes modelos discretos

- **Distribuição Binomial Negativa** $Y \sim BN(r, q)$

$$P(Y = y) = \binom{y + r - 1}{y} q^r (1 - q)^y$$

$$E(Y) = \frac{r(1-q)}{q} \qquad var(Y) = \frac{r(1-q)}{q^2}$$

- É uma generalização da distribuição geométrica
  - Soma de variáveis aleatórias com distribuição geométrica.

- O número de tentativas é aleatório (diferente da binomial)

Modelo adequado a frequência de eventos ocorridos em intervalos de tempos disjuntos não são independentes entre si.

Importantes modelos discretos

$$
\begin{tikzcd}
Y\sim G(q) \arrow[r, shift left, "\sum Y"] & X\sim BN(r,q) \arrow[l, shift left, "r = 1"] \arrow[d, "\lambda = \frac{r}{q}", "r \to \infty"'] \\
W\sim B(n,q) \arrow[r, "\lambda = nq", "n \to \infty"'] \arrow[d, "n = 1"] & Y\sim Po\ (\lambda) \\
W_1\sim Bernoulli(q) &
\end{tikzcd}
$$

Importantes modelos contínuos

Distribuição Uniforme contínua

$Y \sim U_c(a,b)$

$$f(y) = \frac{1}{b-a} I_{[a,b]}(y)$$

No intervalo $[a,b] \subset \mathbb{R}$, todos os sub-intervalos com mesmo comprimento tem a mesma probabilidade.

$E(Y) = \frac{a+b}{2}$ $\qquad$ $var(Y) = \frac{(b-a)^2}{12}$

$$F(y) = \frac{y-a}{b-a} I_{[a,b]}(y) + I_{[b,\infty)}(y).$$

Distribuição Exponencial

Importante função de distribuição utilizadas na modelagem de dados que representam o tempo até a ocorrência pela primeira vez de algum vento de interesse,

- *Tempo de falha de um componente eletrônico.*
- *Tempo de ocorrência de indenização em uma seguradora.*
- *Intervalos entre chegadas de mensagens eletrônicas.*

Boas propriedades matemáticas -Falta de memória

Distribuição Exponencial

$Y \sim Exp(\alpha)$

$$f(y) = \alpha e^{-\alpha y} I_{[0,\infty)}(y)$$

O parâmetro α indica a taxa de ocorrência por unidade de medida, que pode ser tempo, distância ou volume, entre outras.

$$F(y) = (1 - e^{-\alpha y}) I_{(0,\infty)}(y)$$

$$E(Y) = \frac{1}{\alpha} \qquad var(Y) = \frac{1}{\alpha^2}$$

Distribuição Normal

- A grande maioria das técnicas empregadas é baseada na distribuição normal.
- Inúmeros fenômenos alheatórios podem ser descritos precisa ou aproximadamente por este modelo.
- Essa distribuição é a forma limitante de outras distribuições de probabilidade, como consequência do teorema centro do limite.
- Muitas estatísticas apresentam normalidade assintótica.

Distribuição Normal

$Y \sim N(\mu, \sigma^2)$

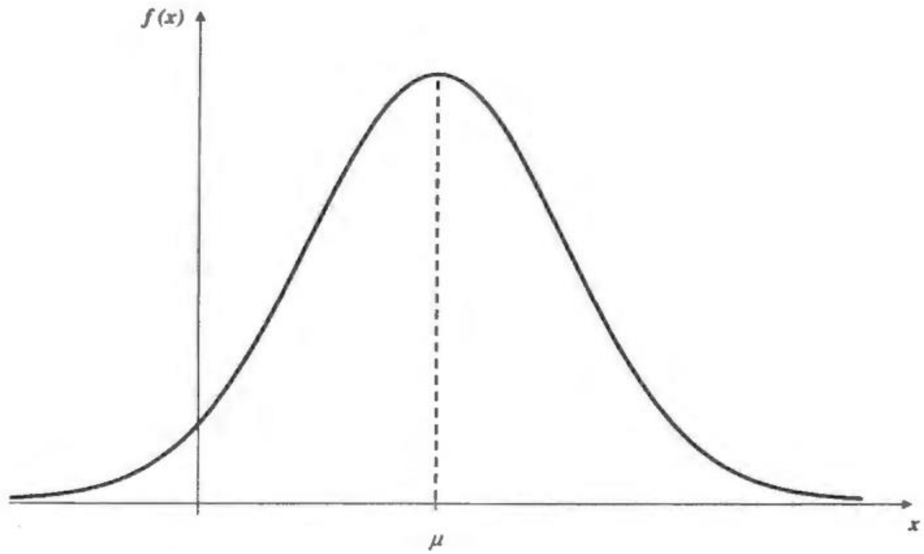
$$f(y) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(y-\mu)^2}{2\sigma^2}} I_{(-\infty,\infty)}(y)$$

com $\mu, \sigma, y \in \mathbb{R}$, $\sigma > 0$

Os parâmetros μ, σ^2 são respectivamente, a média e a variância da variável.

$$E(Y) = \mu \qquad var(Y) = \sigma^2$$

Distribuição Normal



Simétrica ao redor de μ e vai diminuindo a massa de probabilidade, à medida que seus valores se movem para as extremidades.

Adequado para várias quantidades envolvendo medidas populacionais:

Peso, Altura, Dosagem de substâncias no sangue, ...

Distribuição Normal

- A função de distribuição da $N(\mu, \sigma^2)$ não tem uma forma fechada.
  - Não possui primitiva.

- Os valores de probabilidade são obtidos por integração numérica e apresentados em tabela.

- Basta, tabelar as probabilidades para $\mu = 0$ e $\sigma^2 = 1$. Uma transformação linear de Y é feita nesse sentido.

$$Y = \sigma Z + \mu$$

Sendo $Z \sim N(0,1)$

Distribuição Normal

Sendo $Y \sim N(\mu, \sigma^2)$, então $Z = \frac{Y-\mu}{\sigma}$ terá distribuição $N(0,1)$.

$$P(Y \leq y) = P\left(Z \leq \frac{y-\mu}{\sigma}\right) = \Phi(z)$$

A distribuição $N(0,1)$ é denominada Normal Padrão ou Normal Reduzida.

Distribuição Normal

$$P(a < Y < b) = P\left(\frac{a-\mu}{\sigma} < Z < \frac{b-\mu}{\sigma}\right)$$

$$P(a < Y < b) = F_Y\left(\frac{b-\mu}{\sigma}\right) - F_Y\left(\frac{a-\mu}{\sigma}\right)$$

Pareto

- $X \sim Pareto(\alpha, \beta)$

$$f(X) = \frac{\alpha\beta^{\alpha}}{(\beta+x)^{\alpha+1}}, \quad x > 0\ (\alpha, \beta > 0)$$

$$E(X) = \frac{\beta}{(\alpha - 1)} \qquad var(X) = \frac{\alpha\beta^2}{(\alpha-1)^2(\alpha-2)}, \alpha > 2$$

- Utilizada no seguro de incêndio vultoso, e resseguro de catástrofe.

Lognormal

- $Y \sim LN(\mu, \sigma^2)$

$$f_Y(y) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(\log(y)-\mu)^2}{2y\sigma^2}} I_{(0,\infty)}(y)$$

$$E(Y) = e^{\mu + \left(\frac{\sigma^2}{2}\right)} \qquad var(Y) = e^{2(\mu+\sigma^2)}$$

- Utilizada nos seguros de automóveis e incêndio comum.

Referências

- Magalhães, M. N. Lima, A. C. P. **Noções de Probabilidade e Estatística**, Editora USP: São Paulo, 2001.
- JAMES,B.R.; **Probabilidade: Um Curso em nível intermediário**, IMPA, Rio de Janeiro, 3 ed., 2004.
- PIRES,M.D.;COSTA,L.H.;FERREIRA,L.;MARQUES,R. **Teoria do risco atuarial: Fundamentos e conceitos.** Curitiba, CRV 2020.